平成 22 年度　物性物理学１　解答

第 1 問

[1]

質点の座標 (x,z) は

$$\begin{cases} x = X + l\sin\theta \\ z = -l\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

これから質点の速度は

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{X} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

となるので、運動エネルギー T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) \end{aligned} \tag{3}$$

また、ポテンシャルエネルギー U は

$$U = mgl\left(1-\cos\theta\right) + \frac{1}{2}kX^2 \tag{4}$$

以上から Lagrangian $\mathscr{L}$ $(= T - U)$ は、

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) - mgl\left(1-\cos\theta\right) - \frac{1}{2}kX^2 \tag{5}$$

となる。

[2]

Euler-Lagrange の方程式は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{X}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial X} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} = 0 \tag{7}$$

である。よって、

$$m\ddot{X} - ml\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right) + kx = 0 \tag{8}$$

$$ml\ddot{X}\cos\theta + ml^2\ddot{\theta}^2 + mgl\sin\theta = 0 \tag{9}$$

[3]

$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ はいずれも微小量であるとして、それらの 2 次以上の項は無視する。
また、$\cos\theta \simeq 1, \sin\theta \simeq \theta$ と近似すると、式 (8), (9) はそれぞれ

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kX = 0 \tag{10}$$

$$ml\ddot{X} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \tag{11}$$

となる。

$$\therefore \left(\frac{mg}{k} + l\right)\ddot{\theta} + g\theta = 0 \tag{12}$$

この微分方程式は単振動の式であり、その固有振動数は、ω とすると、

$$\omega = \sqrt{\frac{gk}{mg + kl}} \tag{13}$$

である。

[4]

ところが $k \to 0$ とすると $\omega \to 0$ となり、明らかに直観と相容れない。
そこで $k = 0$ とすると、式 (6) は、

$$m\frac{d}{dt}\left(\dot{X} + l\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0 \tag{14}$$

$$\therefore \dot{X} = -l\dot{\theta}\cos\theta + Const. \tag{15}$$

式 (7) は、式 (9) そのままだが、式 (15) から左辺第 2 項は二次の微小量となるので、

$$\ddot{X} + l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{16}$$

[5]

式 (16) に式 (15) を代入して整理すると、

$$\ddot{\theta} - \cos\theta\frac{d}{dt}\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{17}$$

が得られる。

[6]

求め方は色々あるが、ここではヒントに従って $z = \cos\theta$ とおいて解く方法を採る。
z を t で微分して

$$\dot{z} = -\dot{\theta}\sin\theta, \quad \ddot{z} = -\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta \tag{18}$$

これらを式 (17) に代入すると、

$$\ddot{z}\sin\theta = \frac{g}{l}\sin\theta \tag{19}$$

を得る。今、 $\theta \neq 0$ とすると、

$$\ddot{z} = \frac{g}{l} \tag{20}$$

求める解は、$\theta(0) = \theta_0 > 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ から、$z(0) = \cos\theta_0$, $\dot{z}(0) = 0$ なので

$$(z =)\cos\theta = \frac{g}{2l}t^2 + \cos\theta_0 \tag{21}$$

を得る。

[7]

$\theta = 0$ となる時刻を t^* とすると、

$$t^* = \left\{\frac{2l}{g}\left(1 - \cos\theta_0\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

よって、 $\theta - t$ のグラフは、 （$t = 0$ から t^* までの） $z - t$ のグラフを参考にして

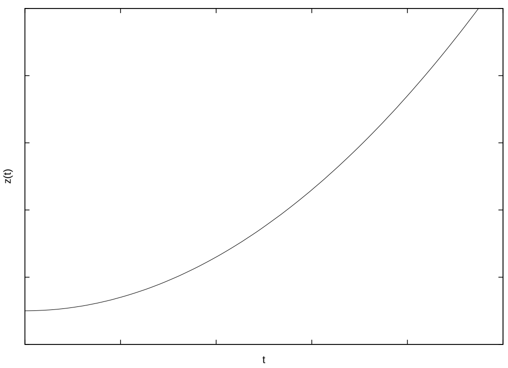

図 1　$z - t$

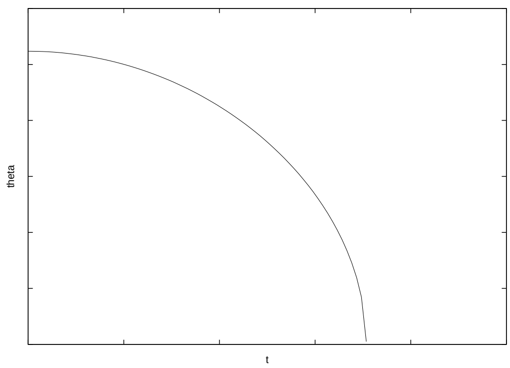

図 2　$\theta - t$

[8]

$X(0) = 0$, $\dot{X}(0) = 0$ のとき、式 (15) から

$$X = l\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right) \tag{23}$$

$$\therefore\ X = l\sin\theta_0 - l\sqrt{1 - \left(\frac{g}{2l}t^2 + \cos\theta_0\right)} \tag{24}$$

[6] 補足

解答以外の解き方について
式 (17) の両辺に $\dot{\theta}$ をかけて、t で積分する。

$$\int dt\dot{\theta}\ddot{\theta} - \int dt\dot{\theta}\cos\theta\frac{d}{dt}\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{g}{l}\int dt\dot{\theta}\sin\theta \tag{25}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + \mathrm{C} \tag{26}$$

$$\therefore\ z = \frac{g}{2l}\left(z+\mathrm{D}\right)^2 + \mathrm{C} \tag{27}$$

ただし C, D は積分定数。これが最もエレガントで、出題者の意図していた解き方であろう。

他に、愚直に $\theta = \cos^{-1} z$ として解く方法もある。

[7] 補足

$\theta \approx 0$ であるとすると、

$$\begin{array}{cccc} -) & \cos\theta & \simeq & \frac{g}{2l}t^2 + \cos\theta \\ +) & 1 & = & \frac{g}{2l}{t^*}^2 + \cos\theta_0 \\ \hline =) & 1-\cos\theta & \simeq & \frac{g}{2l}\left({t^*}^2 - t^2\right) \end{array} \tag{28}$$

$$\therefore\ \frac{\theta^2}{2} \simeq \frac{g}{2l}\left(t^*+t\right)\left(t^*-t\right) \tag{29}$$

$$\therefore\ \theta \simeq \sqrt{\frac{2g}{l}t^*}\left(t^*-t\right)^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

$$\therefore\ \dot{\theta} \simeq -\sqrt{\frac{2g}{l}t^*}\left(t^*-t\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{31}$$

これらから、

$$\theta\dot{\theta} \simeq -\frac{gt^*}{l} = const. \tag{32}$$

$\theta \to 0$ で $\dot{\theta}$ は激しく変化するので、 $\omega = \dot{\theta} \neq const$ であると言える。