平成２２年度　物性物理学１　解答

第 2 問

[1]

Ampère の法則：　C は半径 r の円周で S はその閉曲面として

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{1}$$

円柱導体の中心軸からの距離を r とすると、$r < a$ のとき、

$$2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi r^2 \tag{2}$$

$$\therefore\ B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} r \tag{3}$$

$r > a$ のとき、

$$2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi a^2 \tag{4}$$

$$\therefore\ B(r) = \frac{\mu_0 j}{2r} a^2 \tag{5}$$

いずれの場合の磁束密度 $B(r)$ も電流の向きに進む右ネジが回る方向である。
つまり、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ としてベクトルで表すと、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j}{2}(-y, x, 0) & (r < a) \\ \dfrac{\mu_0 j a^2}{2r^2}(-y, x, 0) & (r > a) \end{cases} \tag{6}$$

[2]

$\vec{\nabla} \times \vec{B}$ を計算して、微分形の Ampère の法則を確かめる。
$r < a$ のとき

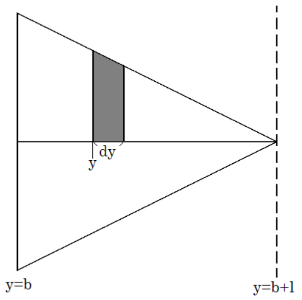
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(0, 0, \frac{\mu_0 j}{2}(1 + 1)\right) = (0, 0, \mu_0 j) \tag{7}$$

$r > a$ のとき

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(0, 0, \frac{\mu_0 j a^2}{2}\left(\frac{2r^2 - 2x^2 - 2y^2}{r^4}\right)\right) = (0, 0, 0) \tag{8}$$

よって、確かに成り立っている。

[3]



図のような回路の斜線の微小な面積を貫く磁束 $d\Phi$ は

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{l+b-y}{2}B(y)dy \\ &= \frac{\mu_0 a^2 j}{4}\left(\frac{l+b}{y}-1\right)dy \end{aligned} \tag{9}$$

いま二等辺三角形の回路は yz 平面に置かれているので、 $x=0$ とした。つまり、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left(\frac{\mu_0 a^2 j}{2y}, 0, 0\right) \tag{10}$$

ただし図では斜線部は台形であるが、微小なので長方形として計算している。

以上から回路を貫く全磁束 Φ は

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\int_b^{b+l} d\Phi \\ &= \int_b^{b+l} \frac{1}{2}\mu_0 a^2 j\left(\frac{l+b}{y}-1\right)dy \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 a^2 j\left\{-l+(l+b)\log\left(\frac{b+l}{b}\right)\right\} \end{aligned} \tag{11}$$

[4]

b を変数とみて、$\frac{db}{dt}=v$ とおけば、回路に発生する誘導起電力の大きさ V は

$$\begin{aligned} V &= \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 a^2 jv\left\{\log\left(1+\frac{l}{b}\right)-\frac{l}{b}\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

となる。起電力の向きは $-x$ 方向に進む右ネジが回る方向に発生する。
b が大きくなればなるほど、V はゼロに近づく。