平成２２年度　物性物理学１　解答

第 4 問

[1]

$|\epsilon_{\boldsymbol{k}}| \ll W$ では

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}} \simeq \pm v\hbar\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{1}$$

と近似できる。このとき

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{k}} 2 &= 2\frac{L^2}{(2\pi)^2}\int dk_x \int dk_y \\ &= \frac{L^2}{\pi}\int kdk \ \ (\because\ k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}) \\ &= \frac{L^2}{\pi}\int \frac{|\epsilon|}{v\hbar}\frac{1}{v\hbar}d\epsilon \ \ (\because\ \text{式}\,(1)) \\ &= \int d\epsilon \frac{L^2}{\pi v^2\hbar^2}|\epsilon| \\ &\equiv \int d\epsilon D(\epsilon)\end{aligned} \tag{2}$$

$$\therefore\ D(\epsilon) = A|\epsilon| \tag{3}$$

[2]

$D(\epsilon)$ は ϵ の偶関数であるので、

$$\begin{aligned}N &= \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) \\ &= \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon)\left\{f(\epsilon) + f(-\epsilon)\right\} \\ &= \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon)\left\{\frac{1}{e^{\beta\epsilon}+1} + \frac{e^{\beta\epsilon}}{e^{\beta\epsilon}+1}\right\} \\ &= \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon)\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}E &= \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon D(\epsilon)\epsilon f(\epsilon) \\ &= \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon)\left\{\epsilon f(\epsilon) - \epsilon f(-\epsilon)\right\} \\ &= \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon)\left\{\epsilon f(\epsilon) - \epsilon\frac{e^{\beta\epsilon}}{e^{\beta\epsilon}+1}\right\} \\ &= \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon)\left\{\epsilon f(\epsilon) + \epsilon\left[f(\epsilon) - 1\right]\right\} \\ &= \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon)\epsilon\left[2f(\epsilon) - 1\right]\end{aligned} \tag{5}$$

[3]

低温 ($k_BT \ll W$) において、全エネルギー E の温度に依存する部分について低温展開すると

$$\begin{aligned} E(T) - E(T=0) &= 2\int_0^\infty d\epsilon\, \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) \\ &= 2\left\{ \ln 2 \cdot (\epsilon D)\Big|_{\epsilon\to+0} k_BT + \frac{\pi^2}{12}\,\frac{d}{d\epsilon}(\epsilon D)\bigg|_{\epsilon\to+0} (k_BT)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4}\zeta(3)\,\frac{d^2}{d\epsilon^2}(\epsilon D)\bigg|_{\epsilon\to+0} (k_BT)^3 + O\left((k_BT)^4\right) \right\} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで、

$$\frac{d}{d\epsilon}(\epsilon D(\epsilon))\bigg|_{\epsilon\to+0} = 2A\epsilon|_{\epsilon\to+0} = 0,\ \frac{d^2}{d\epsilon^2}(\epsilon D(\epsilon))\bigg|_{\epsilon\to+0} = 2A \tag{7}$$

となるので、以上から

$$E(T) - E(T=0) = 3A\zeta(3)(k_BT)^3 \tag{8}$$

[4]

低温での熱容量 C は

$$C = \frac{d}{dT}(E(T) - E(T=0)) = 9A\zeta(3)k_B^3T^2 \propto T^2 \tag{9}$$

グラフェンのエネルギー分散が式 (1) からも分かるように $\epsilon \propto k$ なので通常の金属 ($\propto k^2$) とは違う。そのため、熱容量の温度依存性が異なっている。