OSCILLATIONS IN A FERMI LIQUID

L. D. Landau, *Soviet Phys.-JETP*, **5**, 101 (1959)

藤本 純治

大阪大学大学院 基礎工学研究科

物質創成専攻 物性物理工学領域 三宅研究室

2010/05/20 - 06/21

概要

フェルミ流体中では，流体力学に従うような通常の音波が伝播できない絶対零度においても伝播する音波が存在する（Zero Sound）．この論文では電荷を持たないフェルミ粒子系の場合について絶対零度と有限温度とで Zero Sound が存在しうることを示す．さらに，そのような音波の吸収についても言及している.[*1]

*1 この文章は表題の論文についての紹介であるが，論文自体が古く，また Abrikosov ら (1959) による，より丁寧なレポート [2] などフェルミ流体について多数の文章がある．この文章はそれらを参考にしている箇所があることに留意していただきたい．もちろん，参考にした箇所は参考文献を記している．

1 VIBRATIONS IN A FERMI LIQUID AT ABSOLUTE ZERO

[絶対零度でのフェルミ流体について]

フェルミ流体に摂動が加わった状況を考ええ，この節では，スピンを持たない粒子系を考える．これは平衡状態の分布関数 n_0 とその摂動である分布関数 δn がスピンに依存しないということを示している．すなわち，フェルミ流体の分布関数 n は

$$n(\boldsymbol{p}) = n_0(p) + \delta n(\boldsymbol{p}) \tag{1}$$

で表される．$T = 0\,[\mathrm{K}]$ では $n_0 = \quad S\theta(p_0 - p)$ である．ただし，$\theta(x)$ はヘヴィサイドの階段関数であり，S は飛び幅，$p = p_0$ はフェルミ運動量とする．

準粒子のエネルギーは

$$\epsilon(\boldsymbol{p}) = \epsilon_0(p) + \delta\epsilon(\boldsymbol{p}) \tag{2}$$

$$\delta\epsilon(\boldsymbol{p}) = \mathrm{Tr}' \int f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'})\, \delta n(\boldsymbol{p'})\, \mathrm{d}\tau',\ \ \mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tag{3}$$

で表される [1]. ここで，$\epsilon_0(p)$ は準粒子の平衡状態のエネルギーである．

いま δn はスピンに依存しないと仮定したので，Tr は散乱振幅 $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'})$ にのみ作用する．けれど $\mathrm{Tr}'f$ の σ を含む項は時間反転に対して不変でない形でしか現れないので，時間反転に対して不変な $\delta\epsilon$ には寄与しない．よって，$\delta\epsilon$ はスピンに依存しないことが示される．

フェルミ流体に対する運動方程式は次のような形をしている.*2

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = I(n) \tag{4}$$

ここで，$I(n)$ は準粒子間の衝突積分であるが，絶対零度ではゼロとなる。(1),(2) 式を (4) 式に代入し n_0, ϵ_0 が $\boldsymbol{r}$ に依存しないことを用いて

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial \delta\epsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = 0 \tag{5}$$

δn, $\delta\epsilon$ が時間的に ω，空間的に $\boldsymbol{k}$ で振動していると仮定すると，(i.e. $\delta n \propto e^{\mathrm{i}(\mathrm{k}\cdot\mathrm{r} - \omega \mathrm{t})}$ etc.)

$$(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} - \omega)\delta n = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \delta\epsilon \tag{6}$$

ただし，準粒子の速度として $\boldsymbol{v} = \partial\epsilon/\partial\boldsymbol{p}$ を導入した．

(6) 式右辺の $\partial n_0/\partial\epsilon$ は $T = 0\,[\mathrm{K}]$ ではデルタ関数なので，非摂動のフェルミ分布関数での $p = p_0$ とした値のみが δn に寄与することが分かる．そこで，新たに

$$F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'}) = \mathrm{Tr}' f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'})\, 4\pi \frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}\epsilon'} \frac{p'^2}{(2\pi\hbar)^3} \tag{7}$$

を導入すると，(3) 式は次のように書き換えられる．

$$\delta\epsilon = \iint F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p'})\, \delta n(\boldsymbol{p'}) \mathrm{d}\epsilon' \frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi} \tag{8}$$

*2 導出については，A.A. Abrikosov『金属物理学の基礎』上の (3.5) 式あたりを参照のこと．ただし，正準方程式 $\partial\boldsymbol{r}/\partial t = \partial\epsilon/\partial\boldsymbol{p}$, $\partial\boldsymbol{p}/\partial t = -\partial\epsilon/\partial\boldsymbol{r}$ であることに注意.

いま，$\delta n(\boldsymbol{p}')$ のみが $\epsilon(\boldsymbol{p}')$ に対して変化するとすれば，（すなわち，他の変数は $\epsilon(\boldsymbol{p}')$ に対する変化が穏やかであると仮定すると）

$$\delta\epsilon = \int F(\chi)\,\nu(\hat{\boldsymbol{p}}')\,\frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi} \tag{9}$$

ただし，

$$\nu(\hat{\boldsymbol{p}}) = \int \delta n(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}\epsilon \tag{10}$$

であり，$\hat{\boldsymbol{p}}$ は，ベクトル $\boldsymbol{p}$ の方向をもった単位ベクトルである．また $F(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$ に対しては $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ をフェルミ面上の運動量 $\boldsymbol{p}_F$, $\boldsymbol{p}'_F$ に置き換え，そのとき F は $\boldsymbol{p}_F$ と $\boldsymbol{p}'_F$ のなす角 χ にのみ依存することを考慮した．

ここで実際の粒子の質量 m と準粒子の有効質量 m^* を関係づける式は $F(\chi)\cos\chi$ の角度平均を用いて

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*}\left(1 + \overline{F\cos\chi}\right) \tag{11}$$

（ただし，この式を導く際に $\epsilon = p^2/2m^*$ を仮定している）と表され，また通常の音波の速度 c は

$$c^2 = \frac{p_0^2}{3m^2}\frac{1+\overline{F}}{1+\overline{F\cos\chi}} \tag{12}$$

と表される．[1]

(9) 式を (6) 式に代入し，両辺を ϵ で積分すると，

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} - \omega)\,\nu(\hat{\boldsymbol{p}}) = -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}\int F(\chi)\,\nu(\hat{\boldsymbol{p}}')\frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi} \tag{13}$$

となる．

ここで $\boldsymbol{k}$ を軸にとり，運動量 $\boldsymbol{p}$ の方向（$\boldsymbol{v}$ と一致）を θ, φ で表すとして，

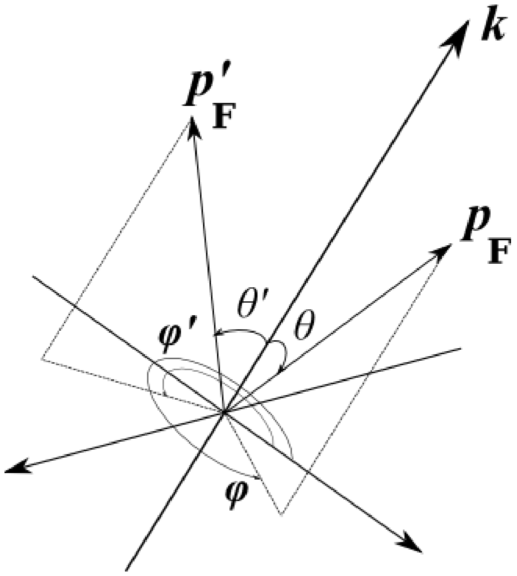

図 1　座標の採り方

また，この波の伝播速度を $u=\omega/k$ とし，さらに $\eta=u/v$ を導入すると，

$$(\eta-\cos\theta)\,\nu(\theta,\varphi)=\cos\theta\int F(\chi)\,\nu(\theta',\varphi')\frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi} \tag{14}$$

と表される．

この積分方程式は，波の伝播の主速度と振幅 $\nu(\theta,\varphi)$ の形とを定めている．振幅 $\nu(\theta,\varphi)$ について，(6) 式から δn は，導関数 $\partial n_0/\partial\epsilon$ に比例しているが，それは振動に対する分布関数の変化がフェルミ面の変形を弱めることを意味している．(10) 式の積分は，$\hat{\boldsymbol{p}}$ におけるフェルミ面の（単位エネルギーあたりの）変化の大きさを示していることになる．

さて，(12) 式を満たすような波において，実際の—すなわち，減衰しないような—ものは $\eta>1$ である．つまり，

$$u>v \tag{15}$$

である．

具体的な場合として，$F(\chi)$ が定数（F_0 とする）であるようなときを考えてみると，この場合，(12) 式右辺の積分は θ,φ に依らない．

$$\therefore\ \nu=\frac{\cos\theta}{\eta-\cos\theta}\,\mathrm{const.} \tag{16}$$

これは，波の伝播方向 $\boldsymbol{k}$ の場合にはフェルミ面が引き伸ばされ，伝播と反対方向では平らになるような変形を示している．比較のため，通常の音波（$\nu=\mathrm{const}\cdot\cos\theta$）について考えると，それはフェルミ面の形状を変えずに全体として移動するような変形である．それゆえ，いま考えているような音波は通常の音波とは異なることが分かる．

伝播速度 u を決定するために，この ν を (14) 式に代入して整理すると，

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'}{\eta-\cos\theta'}\ 2\pi\sin\theta'\mathrm{d}\theta'=\frac{1}{F_0} \tag{17}$$

ここで左辺を $\varphi(\eta)$ とおく．積分を実行すると，

$$\varphi(\eta)=\frac{\eta}{2}\ln\frac{\eta+1}{\eta-1}-1 \tag{18}$$

となる．$\varphi(\eta)$ は η が 1 から ∞ へと変わると，$+\infty$ から 0 へと単調に減少する．（図 2. 参照）よって，(15) 式を満たすような η が存在するためには $F_0>0$ でなければならず，逆に $F_0>0$ のとき (15) 式を満たす η は必ず存在することが分かる．

ところで，$F(\boldsymbol{p}_F,\boldsymbol{p}'_F)$ は散乱振幅に比例しているので，$\boldsymbol{p}_F$ と $\boldsymbol{p}'_F$ とを互いに逆方向にとると F_0 は負になる．けれども，この結論は $F=\mathrm{const.}$ という場合にのみ適応されるべきであり，$F(\chi)$ が一定でなく 1 に比べて小さくない場合—準粒子間の相互作用が引力的でも斥力的でも— Zero Sound の伝播は一般に起こりうる．

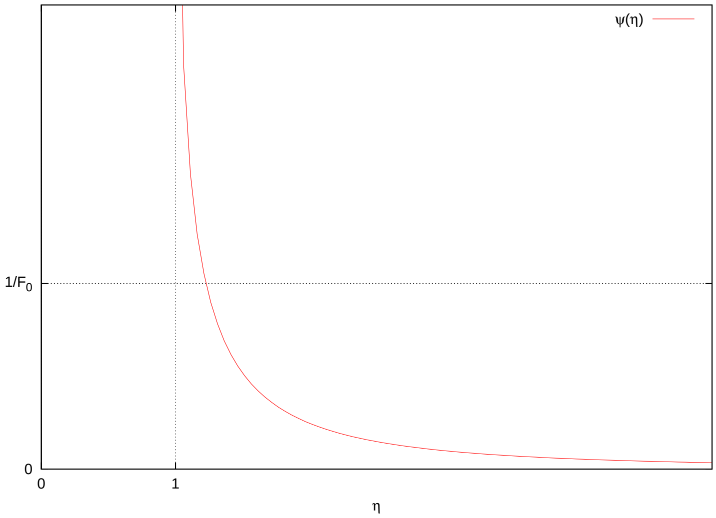

図 2　$\varphi(\eta)$ と $1/F_0$ の関係

[漸近形を考える]

$\eta \to \infty$ のとき，$\varphi(\eta) \approx 1/3\eta^2$

$$\therefore\ \eta = \sqrt{\frac{F_0}{3}} \tag{19}$$

となる．逆に $F_0 \to 0$ では,

$$\eta - 1 \sim e^{-2/F_0} \tag{20}$$

という関係から $\eta \to 1$ となる．

後者（$\eta \approx 1$）の場合の方がより一般的であり，それは関数 $F(\chi)$ がどのような形をしていても，ほとんど理想的なフェルミ気体中に Zero Sound が存在することに相当している．実際，ほとんど理想的なフェルミ気体は絶対値の小さい関数 F に対応している．(12) 式から，いまのような場合においては $\eta \approx 1$ となり，$\nu(\theta, \varphi)$ は小さい θ に対してのみ 0 でない有限の値をもつだろうことが予想される．このような考えに立って，またそのような領域の θ のみを考慮すると ($\theta \to 0$, $\theta' \to 0$ のとき $\chi \to 0$)，(12) 式の積分での $F(\chi)$ は，$F(0)$ に置き換えることができ，結果として，(14) 式以降の議論で F_0 を $F(0)$ に直した式を得る*3.

弱い相互作用のある非理想フェルミ気体において，Zero Sound の速度は通常の音波の速度に比べて $\sqrt{3}$ という因子だけ速く伝播する．実際，$\eta \approx 1$ (i.e. $u \approx v$) とすると，(12) 式で $F(\chi) \ll 1$ とおけば,

$$c^2 \approx \frac{p_0^2}{3m^2} = \frac{v^2}{3} \tag{21}$$

となることが示せる．

*3　それは，Silin によって得られた結果 [3] と一致するとのことだが，まだチェックできていない．

$F(\chi)$ が任意の依存性をもつような一般的な場合，(14) 式の解は判然としない．原理上は，また別のタイプの Zero Sound が存在してもよく，それは振幅 $\nu(\theta,\varphi)$ の角度依存性で区別され，また，異なる速度で伝播するものである．$\boldsymbol{k}$ 軸に対して対称な解 $\nu(\theta)$ に伴って，φ の変化による非対称な解もまた存在する．

そのような場合，

$$\nu(\theta,\varphi)=\nu(\theta)\,e^{\pm \mathrm{i}m\varphi}\quad (m\text{ は整数}) \tag{22}$$

よって，

$$\begin{aligned} F &= F_0+F_1\cos\chi \\ &= F_0+F_1(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')) \end{aligned} \tag{23}$$

[*4] のように表される関数 $F(\chi)$ に対して，(14) 式の解は次のようになる．

$$\nu\sim e^{\pm\mathrm{i}\varphi} \tag{24}$$

実際に $\nu=f(\theta)\,e^{\mathrm{i}\varphi}$ を仮定し，(23) 式を (14) 式に代入して，$\mathrm{d}\Omega'$ のうち φ' について積分を実行すると

$$(\eta-\cos\theta)\,f(\theta)=\frac{F_1}{4}\cos\theta\sin\theta\int_0^\pi \sin^2\theta'\,f(\theta')\,\mathrm{d}\theta' \tag{25}$$

$$\therefore\ \ \nu=\mathrm{const}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{\eta-\cos\theta}\,e^{\mathrm{i}\varphi} \tag{26}$$

となり，確かに解となっている．また，逆にこの式を (14) 式に代入すると，

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{\eta-\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{4}{F_1} \tag{27}$$

が得られ，伝播速度の F_1 依存性が決定される．左辺の積分（$I(\eta)$ とする）は η が増大するとともに単調に減少する．（図 3. 参照）ゆえにその最大値は $\eta=1$ のとき得られる．このとき $F_1=6$ となるので，(22) 式のような非対称な波の伝播は $F_1>6$ のときのみ可能となる．

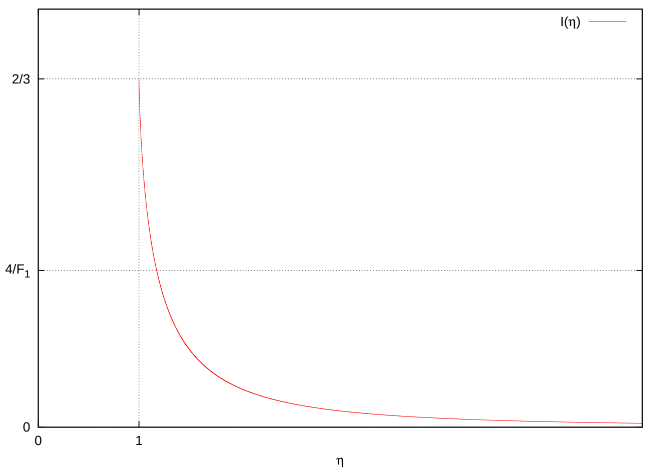

図 3　$I(\eta)$ と $1/F_1$ の関係

[*4] $\boldsymbol{k}=(k\sin\theta\cos\varphi,\,k\sin\theta\sin\varphi,\,k\cos\theta)$ などと $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ を極座標表示で表して，$\cos\chi=\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{kk'}$ から得られる．

[実在のフェルミ流体（液体 ^{3}He）について]

$F(\chi)$ という未知の関数を (23) 式で近似して，係数 F_0, F_1 を (11)，(12) 式より得られる次の関係から決定する．

$$F_0 = \frac{3mm^*c^2}{p_0^2} - 1,\ \frac{F_1}{3} = \frac{m^*}{m} - 1 \tag{28}$$

ここで，m^*, c, p_0 についての測定から，$m^* = 1.43\,[\mathrm{m}]$, $c = 195\,[\mathrm{m/sec}]$, $p_0/\hbar = 0.76 \times 10^8\,[\mathrm{cm}^{-1}]$ が得られ，F_0, F_1 は

$$F_0 = 5.4,\ F_1 = 1.3 \tag{29}$$

となる．これから次のような結論が導かれる．すなわち，液体 ^{3}He 中では非対称な Zero Sound は伝播できず，対称なものは，(22) 式で $m = 0$ として，(14) 式を解き直せば ※1，

$$\frac{\eta}{2} \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - 1 = \frac{1 + \frac{1}{3}F_1}{F_0 + \frac{1}{3}F_0F_1 + F_1\eta^2} \tag{30}$$

となり，この方程式の解は $\eta = 1.72$ となる [2]．即ち $u = 1.72\,p_0/m^* = 192\,[\mathrm{m/sec}]$ という速度で伝播する[*5]．

2 Vibrations of a Fermi Liquid at Temperatures above Zero

[有限温度における Zero Sound について]

絶対零度において (4) 式で衝突積分 $I(n)$ をゼロとしたが，有限温度では $I(n) \propto T^2$ である ※2．衝突積分 $I(n)$ を $\delta n(\boldsymbol{p})/\tau$ で近似すると，（すなわち準粒子の寿命を τ として）今までの議論において，ω を $\omega - \mathrm{i}/\tau$ で置き換えればそのまま成り立つ．したがって，Zero Sound の減衰の緩和時間も同じ τ で与えられている．これから緩和時間 $\tau \sim T^{-2}$ が言える．フェルミ流体中に伝播する波は，その振動数 ω と緩和時間 τ との関係に本質的に依存している．

1. $\omega\tau \ll 1$ のとき．
   このとき，波長 $\lambda(\sim c/\omega)$ に比べて自由行程 $l(\sim c\tau)$ は短い．それゆえ十分な衝突によって熱平衡状態に達する．それはつまり，速度 c の通常の流体力学に従う音波が伝播することを示している．
2. $\omega\tau \gg 1$ のとき．
   1. とは反対に自由行程 l が波長 λ に比べて十分長い場合であり，このときの波の伝播において衝突は重要な役割を果たさない．そのような波とはすなわち，前節で論じた Zero Sound であろう．
3. $\omega\tau \sim 1$ のとき．
   前の二つの極限では，比較的穏やかな吸収によって波が伝播したが，この場合，非常に吸収が強く，減衰のない行程としての波は存在し得ない．

流体力学に従う音波の場合，Navier-Stokes 方程式によって減衰を取り扱うことができる．この場合，吸収係数 γ が η を粘性係数として $\gamma \propto \omega^2\eta$ となる．この粘性係数 η は緩和時間 τ に比例することになるので，

$$\gamma \sim \frac{\omega^2}{T^2} \quad \text{for} \ \ \omega \ll \frac{1}{\tau} \tag{31}$$

[*5] 絶対零度においてフェルミ流体中に Zero Sound が伝播しうるということは，自動的にそのエネルギースペクトルには $\epsilon = up$ のフォノンという形で「Bose branch」が含まれるということが言える．しかしながら，熱力学量においてそのような分枝はフェルミ流体論から導かれるものよりも温度に対して敏感に反応する—比熱について言えば，T^3 のように—ので，そのような導出について不正確かもしれない．

であることが示される．

通常の流体力学に従う密度波の場合，衝突は分布の「ぼやけ」となるようなエネルギーの散逸を導かず，そのような変化は波の振動それ自身によってのみ起こる。

Zero Sound の領域での吸収は，通常の流体力学に従うような波の吸収とは本質的に異なる性質を持つ．すなわち衝突は振動それ自身によってのみ変化させられている分布の「バックグラウンド」となるような吸収を導く．このような場合では熱平衡状態ではない——なぜなら，フェルミ面の形は変形しているため．この領域での吸収係数 γ —すなわち音波の振幅が e^{-1} —になる伝播距離の逆数は τ^{-1} に比例する， i.e.

$$\gamma \sim T^2 \ \text{ for } \ \frac{k_B T}{\hbar} \gg \omega \gg \frac{1}{\tau} \tag{32}$$

この場合の上限は $\hbar\omega \ll k_B T$ から決定される. よって,

$$\frac{k_B T}{\hbar} \gg \frac{1}{\tau} \quad \therefore \quad \frac{\hbar}{\tau} \ll k_B T. \tag{33}$$

これはフェルミ流体論が適応できるための条件なので必ず満たされているに違いない.

振動数領域 $\hbar\omega \lesssim k_B T$ における Zero Sound の吸収係数を決めるためには,「量子論的」[*6] な考察が要求される．しかし，(32) 式から「古典的」な吸収係数を用いて，求めたい「量子的」な吸収係数を表そうとすると，そのような計算は簡単にできる.

ϵ_1, ϵ_2 のエネルギーをもつ準粒子が振動数 ω の音響量子を衝突により吸収して，準粒子のエネルギーが ϵ_1', ϵ_2' となったとすると，エネルギー保存則より

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \hbar\omega = \epsilon_1' + \epsilon_2' \tag{34}$$

となる. またそのような衝突によって音響量子を放出する過程も同様に考慮に入れなければならない．よく知られたフェルミ粒子の衝突確率の性質を考慮に入れると，散乱の結果として音響量子の全減少率 J_{org} が次のように求まる.

$$\begin{aligned} J_{org} = \iiiint \quad & w(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2; \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2')\,\{n_1 n_2 (1-n_1')(1-n_2') - n_1' n_2' (1-n_1)(1-n_2)\} \\ & \times \delta(\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \hbar\boldsymbol{k})\,\delta(\epsilon_1' + \epsilon_2' - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \hbar\omega)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_1'\,\mathrm{d}\tau_2' \end{aligned} \tag{35}$$

ここで，$w(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2; \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2')$ は，散乱振幅である.

この式において，フェルミ分布関数の拡散領域のエネルギー値のみが重要となり，そのような領域では被積分関数としては $n(\epsilon)$ を含む乗数によってのみ J_{org} が強く変化する．さらに角度積分は古典的な領域 $\hbar\omega \ll k_B T$ から量子的な領域 $\hbar\omega \gg k_B T$ への置き換えにおいて実質的に変化しない.

これらの事情から,

$$\begin{aligned} J = \iiiint \quad & \{n_1 n_2 (1-n_1')(1-n_2') - n_1' n_2' (1-n_1)(1-n_2)\} \\ & \times \delta(\epsilon_1' + \epsilon_2' - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \hbar\omega)\,\mathrm{d}\epsilon_1\,\mathrm{d}\epsilon_2\,\mathrm{d}\epsilon_1'\,\mathrm{d}\epsilon_2' \end{aligned} \tag{36}$$

これに

$$n_1(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon_1 - \mu)/k_B T} + 1} \tag{37}$$

[*6] ここで言う量子論的とは，$k_B T$ に対して $\hbar\omega$ が非常に大きいときである.

などを代入して計算していく※3 と，$\xi = \hbar\omega/k_BT$ として，

$$J = (k_BT)^3\left(\frac{2\,\xi\,\pi^2}{3}\right)\left(1+\frac{\xi^2}{4\pi^2}\right) \tag{38}$$

を得る．求めるべき吸収係数 γ は J に比例する．よって，$\xi \ll 1$ では $\gamma = \gamma_{\mathrm{cl}}$ として，

$$\gamma = \gamma_{\mathrm{cl}}\left[1+\left(\frac{\hbar\omega}{2\pi k_BT}\right)^2\right] \ \text{for} \ \hbar\omega \gtrsim k_BT \tag{39}$$

$\gamma_{\mathrm{cl}} \sim T^2$ を考慮すると，高周波極限では

$$\gamma \sim \omega^2 \ \text{for} \ \hbar\omega \gg k_BT \tag{40}$$

すなわち，吸収係数は振動数の二乗に比例しているが温度には依存していない．注意すべき点は，高周波領域と低周波領域との境目はだいたい

$$\hbar\omega \sim 2\pi k_BT \tag{41}$$

であり，これは $\hbar\omega \nsim k_BT$ である[*7]．特に (41) 式の結果は絶対零度における全ての周波数の Zero Sound に対して言えることである．

この理論に対して，実験結果 (1966) は次のようになっており，これは非常によく一致していることが見てとれる．通常の音波から Zero Sound への移行がはっきりと現れている．[4]

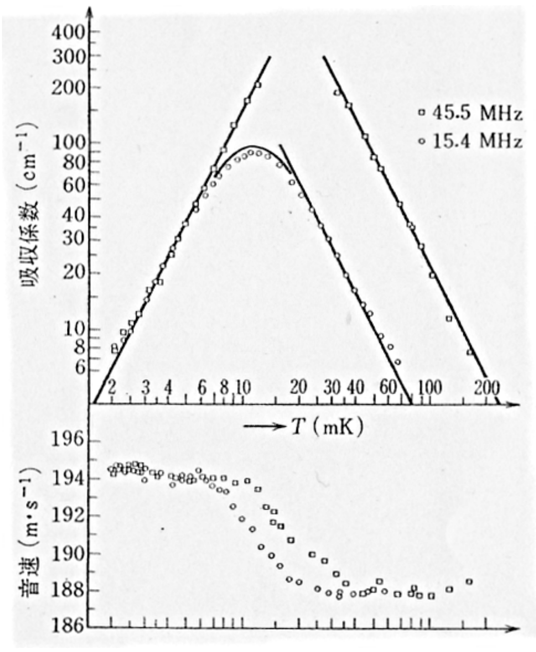

図 4　音波の速度と吸収係数の温度変化 [4]

*7 わざわざ数係数が 2 違うと明記している理由は，これが表すのが音波の減衰であり，準粒子の寿命でないことを強調する意図があるからであろう．cf.) A.A.Abrikosov, L.P.Gorkov, I.E.Dzyaloshinski "Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics" p.201 (19.31) 式との違いを表している．

3 Spin Waves in a Fermi Liquid

[分布関数にスピンが依存する場合について]

ここでは１節で議論した，絶対零度における Zero Sound とはまた別種の波が伝播しうることを述べる。すなわちスピンの分布関数を含むような Zero Sound についてであるが，ここではそのような波をスピン波と呼ぼう。ここでは

$$K = f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\, 4\pi \frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}\epsilon'} \frac{p'^2}{(2\pi\hbar)^3} \tag{42}$$

と表すことにする．１節の (7) 式の F と異なるところは Tr' が含まれていないところである．準粒子間の交換相互作用の形から，K は $\sigma \cdot \sigma'$ に比例するような項を含んでいることが予想される．このことから

$$K_{\sigma\sigma'}(\chi) = \frac{1}{2}F(\chi) + \frac{1}{2}G(\chi)\, \sigma \cdot \sigma' \tag{43}$$

と表すことができるだろう. ただし，$F(\chi)$ は (7) 式と一致する．以上から (12) 式の代わりに，

$$(\eta - \cos\theta)\, \nu(\theta, \varphi) = \cos\theta\, \mathrm{Tr}' \int K_{\sigma\sigma'}(\chi)\, \nu(\theta', \varphi') \frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi} \tag{44}$$

となり，これまで議論してきた解に加え，次のような解もまた存在する．

$$\nu_\sigma(\theta, \varphi) = \mu(\theta, \varphi) \cdot \sigma \tag{45}$$

これら $K_{\sigma\sigma'}(\chi)$, ν_σ を (42) 式に代入し，Tr' の演算を行ったのち σ で両辺を除すると，

$$(\eta - \cos\theta)\, \boldsymbol{\mu}(\theta, \varphi) = \cos\theta \int G(\chi)\, \boldsymbol{\mu}(\theta', \varphi') \frac{\mathrm{d}\Omega'}{16\pi} \tag{46}$$

という式を得る．$\boldsymbol{\mu}$ の各成分に対して，(12) 式について $F(\chi) \to G(\chi)/4$ という置き換えを行った式を得ることが分かる．それゆえに，１節で行った計算すべてがスピン波においても適応できる．

[液体 ^{3}He について]

帯磁率に関する実験から平均値 $\bar{G}$ を決定することができる．その値が負であることから，液体 ^{3}He においてはスピン波は伝播しないであろうと結論される．

参考文献

[1] L. D. Landau, *J.Exptl.Phys.(U.S.S.R.)*, **30**, 1058 (1959); *Soviet Phys.-JETP* **3**, 920 (1957); Collected Papers No.90, p.723

[2] A. A. Abrikosov and I. M. Khlatnikov: Rept. Prog. Phys. **22**, 329 (1959)

[3] V. P. Silin, *J.Exptl.Theoret.Phys.(U.S.S.R)* **28**, 749(1955); *Soviet Phys.-JETP* **1**, 607(1955)

[4] W. R. Abel et al.; *Phys. Rev. Let*,**17**,74(1966)

[5] E.R.Dobbs "Helium Three (The International Series of Monographs on Physics)" Oxford Science Publications

[6] 岩波講座 現代物理学の基礎〈7〉 『物性 I -物質の構造と性質-』 湯川秀樹 監修

※ 3 [計算過程]

まず変数変換

$$x_i = \frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T} \ (i = 1, 2, 1', 2'), \tag{47}$$

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \tag{48}$$

を行い，少し整理すると，

$$J = (k_B T)^3 \iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\xi})\, \delta(x_1' + x_2' - x_1 - x_2 - \xi)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1'\, \mathrm{d}x_2'}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(e^{x_1'} + 1)(e^{x_2'} + 1)} \tag{49}$$

を得る．さらに $y_i = x_i - x_i'$ $(i = 1, 2)$ とすると，

$$J = (k_B T)^3 (1 - e^{-\xi}) \iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(y_1 + y_2 + \xi)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2}{(e^{x_1} + 1)(e^{x_2} + 1)(1 + e^{-x_1 + y_1})(1 + e^{-x_2 + y_2})} \tag{50}$$

であるが，ここで次の積分を実行すると，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(e^x + 1)(1 + e^{-x+y})} &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \frac{1}{(t + 1)(1 + e^y/t)} \quad (\because\ t = e^x) \\
&= \frac{1}{e^y - 1} \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \left(\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + e^y} \right) \\
&= \frac{1}{e^y - 1} \left[\log \frac{t + 1}{t + e^y} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{-y}{e^y - 1}
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \ J &= (k_B T)^3 (1 - e^{-\xi}) \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\, \frac{y_1\, y_2\, \delta(y_1 + y_2 + \xi)}{(1 - e^{y_1})(1 - e^{y_2})} \\
&= -(k_B T)^3 (1 - e^{-\xi}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \frac{y(y + \xi)}{(e^y - 1)(e^{-y-\xi} - 1)} \\
&= (k_B T)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, y(y + \xi) \left(\frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{y+\xi} - 1} \right)
\end{aligned} \tag{52}$$

を得る[*8]．積分が発散してしまうので，ひとまず積分の下端を $-\Lambda$ する．また，第 2 項は $y + \xi \to y$ の変数変

[*8] ただし，最後の等号において次のような変形を行っている．

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\xi} - 1}{(e^y - 1)(e^{-\xi} - e^y)} &= \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{-\xi} - e^y} \\
\therefore\ \frac{e^{-\xi} - 1}{(e^y - 1)(e^{-y-\xi} - 1)} &= \frac{1}{e^{-y} - 1} - \frac{1}{e^{-y-\xi} - 1}
\end{aligned} \tag{53}$$

換を行って

$$
\begin{aligned}
J &= (k_BT)^3 \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y(y+\xi)}{e^y - 1}\mathrm{d}y - (k_BT)^3 \int_{-\Lambda+\xi}^{\infty} \frac{y(y-\xi)}{e^y - 1}\mathrm{d}y \\
&= 2\xi(k_BT)^3 \int_{-\Lambda}^{\infty} \frac{y}{e^y - 1}\mathrm{d}y - (k_BT)^3 \int_{-\Lambda+\xi}^{-\Lambda} \frac{y(y-\xi)}{e^y - 1}\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &= \left(\int_0^{\infty} + \int_{-\Lambda}^{0}\right) \frac{y\mathrm{d}y}{e^y - 1} \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_{-\Lambda}^{0} \left(\frac{y}{1 - e^{-y}} - y\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\Lambda} \frac{y}{e^y - 1}\mathrm{d}y + \frac{\Lambda^2}{2}
\end{aligned} \tag{56}
$$

また第 2 項の分母の e^y は十分大きな Λ では無視できるので

$$
\begin{aligned}
(\text{第 2 項}) &= -\int_{-\Lambda+\xi}^{\Lambda} y(y-\xi)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{\xi^3}{6} + \xi\Lambda^2
\end{aligned} \tag{57}
$$

以上から,

$$
\begin{aligned}
J &= (k_BT)^3 \left(\frac{\pi^2\xi}{3} + 2\xi \int_0^{\Lambda} \frac{y}{e^y - 1}\mathrm{d}y + \frac{\xi^3}{6}\right) \\
&\to (k_BT)^3 \left(\frac{2\pi^2\xi}{3} + \frac{\xi^3}{6}\right)
\end{aligned} \tag{58}
$$

$$
\therefore\ J = (k_BT)^3 \frac{2\pi^2\xi}{3}\left(1 + \frac{\xi^2}{4\pi^2}\right) \tag{59}
$$

となる.

であるから,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, y(y+\xi)\left(\frac{1}{e^{-y} - 1} - \frac{1}{e^{-y-\xi} - 1}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, y(y+\xi)\left(\frac{1}{e^{y} - 1} - \frac{1}{e^{y+\xi} - 1}\right) \quad (y \to -y-\xi)
\end{aligned} \tag{54}
$$