ビオサヴァールの法則を使いこなそう

大阪大院 基礎工 藤本純治[*1]

多くの学生が躓くビオサヴァールの法則に関する解説．実際に自分で計算して慣れることがとても大切.

1 ビオサヴァールの法則とは

ビオサヴァールの法則とは何に対する法則なのかというと, それは 電流要素がつくる磁場に対する法則 である．電流要素というのは，回路に流れる電流を細切れに別けたときの，その一つのことを言う．全部を一度に考えるのは難しいから，少しずつ考えていこうということだ[*2].

一応, 具体的にビオサヴァールの法則を示しておくと，$\boldsymbol{r}$ で表される位置に電流要素 $I\Delta\boldsymbol{r}'$ がつくる磁場 $\Delta\boldsymbol{B}$ は

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\Delta\boldsymbol{r}' \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{1.1}$$

で与えられる．大きさで表すと,

$$|\Delta\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|\Delta\boldsymbol{r}'|\sin\alpha}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \tag{1.2}$$

となる．ここで α は $\Delta\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ とのなす角である．特に $\alpha=\pi/2$ の場合は

$$|\Delta\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|\Delta\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}. \tag{1.3}$$

2 環状電流がつくる磁場を求める

問題 [29] を 3 通りの解き方で求めてみよう．その 3 通りとは (i) 求める磁場 $\boldsymbol{B}$ を大きさと方向とに分けて求める,(ii) 座標を導入して求める,(iii) ベクトルのまま計算する方法である．問題にする電流の経路の対称性が高い場合は, 断然 (i) の方法が楽な計算になる．変わった形（例えば楕円状）の電流の経路において磁場を求める問題は見たことがない[*3]ので, 正直なところ (i) の方法でさえ解けるようになれば問題はない[*4]．ただ, 一応は (ii) や (iii) の解き方でも求められることを知っている方が良いので示しておく.

まずどういう状況を問題にするのか, それを今一度確かめよう．半径 a の円形の回路に定常電流（強さ I）が流れている．回路の中心 O を通って回路に垂直な直線 l 上の点 P で, この電流がつくる磁場 $\boldsymbol{B}$ を求めたいのであった．ただし OP 間の距離を r としている．図 1. は概略図.

さて, いきなりは回路全体の電流がつくる磁場 $\boldsymbol{B}$ を求められない．ひとまず回路の電流の一部分 $I\Delta\boldsymbol{s}$ がつくる磁場 $\Delta\boldsymbol{B}$ を求める．それから, そのような磁場を回路全体で足しあわせて $\boldsymbol{B}$ を求めるという手順を踏む．これは (i)〜(iii) の解き方すべてに共通する．$\Delta\boldsymbol{s}$ の中心を Q としておこう.

---

*1 jfujimoto@blade.mp.es.osaka-u.ac.jp

*2 こうやって別けて考えることができるのは，電流全体がつくる磁場は，それぞれの電流要素のつくる磁場の重ね合わせで表すことができるからである．*cf.*$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \sum_i \Delta\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{r})$，これは磁場の線形性とも言われる．線形性の簡単な例では $f(x)=x$ で, $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$ が成り立つことを言う．$f(x)=x^2$ では $f(ax+by)=a^2x^2+2abxy+b^2y^2 \neq af(x)+bf(y)$.

*3 求めてみると練習になっていいかも知れない.

*4 が，これくらい出来てほしいという気持ちもある.

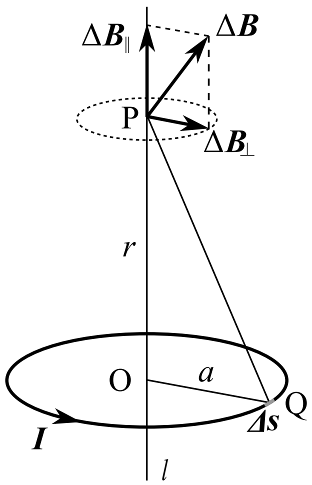

図 1　概略図

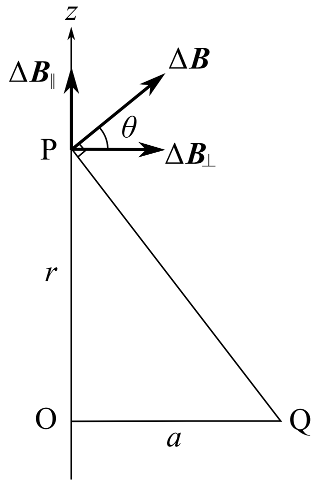

図 2　横から見た図

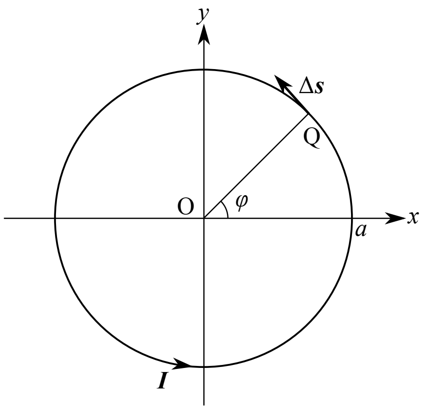

図 3　上から見た図

(i) 求める磁場 $\boldsymbol{B}$ を大きさと方向とに分けて求める解法

Q にある電流要素 $I\Delta\boldsymbol{s}$ のつくる磁場 $\Delta\boldsymbol{B}$ を考えてみる．その方向は，図に示したようになっている．その大きさは (1.3) 式から

$$|\Delta\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|\Delta\boldsymbol{s}|}{r^2+a^2}. \tag{2.1}$$

方向について言葉で説明すると $\Delta\boldsymbol{s}$ の向きと PQ を結ぶ方向との両方に垂直で，$\Delta\boldsymbol{s}$ の向きを右ねじが進む方向としたときにねじが回る方向である．図を見ればすぐに分かる一方で，言葉で表すと回りくどくなってしまうが仕方がない．言葉で説明できるようになっている必要がある．その際「右ねじ」という語を用いて表すのが慣例．

ここで，この磁場 $\Delta\boldsymbol{B}$ を二つの成分に別けておく．直線 l に平行な成分 $\Delta\boldsymbol{B}_{\parallel}$ と垂直な成分 $\Delta\boldsymbol{B}_{\perp}$ との 2 つである．というのも，点 O を基準にして Q とは反対側の電流要素（Q' と呼ぼう）を考えてみると，この電流要素がつくる磁場は，直線 l に平行な成分は同じく $\Delta\boldsymbol{B}_{\parallel}$ であり，垂直な成分は $-\Delta\boldsymbol{B}_{\perp}$ となっていて，Q と Q' とがつくる磁場を合わせると，結局は直線 l に平行な成分の $2\Delta\boldsymbol{B}_{\parallel}$ のみが残る．同じようなことが回路の至る所で言える．すなわち $\Delta\boldsymbol{B}_{\parallel}$ を求めて，それを回路全体で足し合わせれば求めたい磁場が得られるのである．$|\Delta\boldsymbol{B}_{\parallel}|$ を $|\Delta\boldsymbol{B}|$ で表そうとすると，

$$\begin{aligned}|\Delta\boldsymbol{B}_{\parallel}| &= |\Delta\boldsymbol{B}|\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}|\Delta\boldsymbol{B}| \\ \therefore\ |\Delta\boldsymbol{B}_{\parallel}| &= \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|\Delta\boldsymbol{s}|}{r^2+a^2}\end{aligned} \tag{2.2}$$

となっているのだから，求めたい磁場 $\boldsymbol{B}$ の大きさは

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}| &= \sum|\Delta\boldsymbol{B}_{\parallel}| \\ &= \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi a}{r^2+a^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\pi a^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}\end{aligned} \tag{2.3}$$

となる[*5]．補足しておくと，回路全体で足し合わせると $|\Delta \boldsymbol{s}|$ が $2\pi a$ となることを用いている．磁場の向きは電流 $\boldsymbol{I}$ の方向に右ねじを回したときにねじが進む方向である．

(ii) 座標を導入して求める解法

この解法は授業中にも示したが，再掲載．座標にマッピングできたら淡々と計算するだけなので，ある意味でこちらの方が頭を使わなくて楽.

座標の取り方は図 2. のように z 軸を直線 l にとり，図 3. のように x, y 軸を導入する．ここで x 軸と OQ とのなす角を φ とすると

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} -a\Delta\varphi\sin\varphi \\ a\Delta\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

となる[*6]．$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{r^2 + a^2}$ である．Q にある電流要素 $I\Delta\boldsymbol{s}$ のつくる磁場 $\Delta\boldsymbol{B}$ を求める．(1.1) 式から

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{bmatrix} -a\Delta\varphi\sin\varphi \\ a\Delta\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{(r^2+a^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} -a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \\ r \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\Delta\varphi}{(r^2+a^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \\ r \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\Delta\varphi}{(r^2+a^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ a \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

となる．よって点 P での磁場は回路の電流すべてがつくる磁場を合わせたものだから $\boldsymbol{B} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B}$ より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\mathrm{d}\varphi}{(r^2+a^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ a \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\pi a^2}{(r^2+a^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.8}$$

と求まる．これは方向についても答えていることになるので (i) の場合のように説明する必要はないように思うかもしれない．だが，座標は自分で勝手に導入したものなので解答としては言葉で説明しておく方が無難である．繰り返しになるが，磁場の向きは電流 $\boldsymbol{I}$ の方向に右ねじを回したときにねじが進む方向である．

[*5] この式の一つ目の等号は少し正確性に欠ける．積分になると正確.

[*6] $\Delta\boldsymbol{r}'$ については少し注意が必要であるが，詳しくは物理数学の本を参照してもらいたい．簡単に言うと Q を回路上を少しだけ動かせたときの変化分を表している．図示してみると分かりやすいだろう．

(iii) ベクトルのまま計算する解法

まとめる時間がなかったので，また今度[*7].

3 直線電流がつくる磁場を求めてみよう

この場合も対称性を活かして $\boldsymbol{B}$ を大きさと向きとに別けて求めることができる．まず向きを求めておこう．図の電流要素 $I\Delta\boldsymbol{s}$（中心を Q とする）と，点 P から Q へ向かうベクトル（$\boldsymbol{R}$ とする）との外積

$$I\Delta\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R} \tag{3.1}$$

の向きは，電流の向きを右ねじの進む方向としたときのねじの回転する向きとなる．これは Q の位置によらず常に同じ方向になる．つまり全ての直線上の電流要素について素直に足し合わせれば，求めたい磁場となることが分かる．よって Q がつくる磁場の大きさは

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta s}{R^2}\sin\theta \tag{3.2}$$

ここで $\sin\theta = r/R, R = \sqrt{r^2+s^2}$ から，直線電流がつくる磁場の大きさは

$$\begin{aligned}
B &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r\mathrm{d}s}{(r^2+s^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 Ir}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{(r^2+s^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 Ir}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{r\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{\cos^3\varphi}{r^3} \qquad (s = r\tan\varphi \text{ とした}) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

と求まる．この積分は出来るようになっておくこと．また，方向は電流の向きを右ねじの進む方向としたときのねじの回転する向きとなる．

[*7] 気になる人は, バーガー/オルソン著『電磁気学—新しい視点にたって ⟨1⟩』培風館 を見てほしい.