ガウスの法則で電場を求めてみる

大阪大院 基礎工 藤本純治[*1]

1 無限に広がる平面上に分布する電荷が作る電場について

(問題) 面電荷密度 σ で分布する平面電荷の作る電場を求めよ．(図 1)

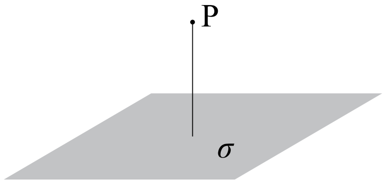

図 1 点 P での電場はどのようになるか．

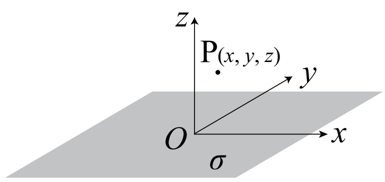

図 2 座標系を導入．

(解説) クーロンの法則を利用して求める方法[*2]もあるが，ここでは積分形のガウスの法則[*3]

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V \tag{1.1}$$

を用いて電場を求める．ガウスの法則の使い方を簡単にまとめると以下のようになる．

1. 電場のおおよその方向を予想する．
2. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ が計算しやすいような閉曲面をとる．
3. ガウスの法則 (1.1) において左辺と右辺をそれぞれ計算する．
4. 電場の大きさを求め，1. での電場の方向と合わせる．

ここでは順序通りに考えてみることにする．まず「1. 電場のおおよその方向を予想する」について．慣れないうちは電場の方向が全く予想できないので苦戦するかもしれないが，色々なパターンの電荷分布がどのような電場を作るのかを知っていくうちに，だいたい分かるようになる[*4]．ここで物理学において非常に重要な観点である「対称性」が有用である．つまりこの問題での，無限に広がる平面上に電荷が分布しているような場合では，どのような対称性があるかと言うと，次のようになる．ひとまず図 2 のように座標系を導入してみよう．

原点を xy-平面内でどのように移動させてみても，何も変化しない[*5]．平行移動に対して対称性 (並進対称性) があると言えるのである (図 3)．このことから電場は x, y には依存しないことが分かる．仮に点 P での電場 $\boldsymbol{E}(P)$ が x や y に依存したとしよう．原点を幾らか平行移動させてみると，同じ点 (新しい座標系では P' と表す) での電場 $\boldsymbol{E}(P')$ が変化するはずである．しかし並進対称性があるので平行移動する前と何も変わっ

[*1] `jfujimoto@blade.mp.es.osaka-u.ac.jp`
[*2] たとえば，長岡洋介著『電磁気学 I—電場と磁場』岩波書店 の p.36 の問題 2．参照．
[*3] $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}), S, V$ などの記号の説明は [*2] の参考書 p.38〜43 を参照．またここでは，ガウスの法則がどのような法則なのかについては知っているものとする．
[*4] もちろん，そのようにして得られた電場が本当に求めたかった電場なのか，について精細に吟味する姿勢を忘れてはいけないが．
[*5] 有限な大きさの平面電荷の場合は平行移動し続ければ，やがては端に行き着いてしまうが無限に広いのでそういうことは起こりえない．

ておらず，$\boldsymbol{E}(P') = \boldsymbol{E}(P)$ となり矛盾が生じ，x, y には依存しないことが示される．ただし z 軸方向について原点を平行移動させてしまうと，平面電荷から離れてしまい，その移動した距離によって変わってしまう．つまり z 軸は特別なのだ．

他にも原点について xy 平面内での回転操作について対称性がある (図 4)．この回転対称性を利用して，z 軸に平行に電場が向いていることが示せる．仮に点 P での電場に，xy-平面に平行な成分があったとしよう．その方向ベクトルを $\hat{\boldsymbol{E}}_{\parallel}(P)$ と書き，座標軸を xy-平面内で回転させた後の方向ベクトルを $\hat{\boldsymbol{E}}_{\parallel}(P')$ と表すとすると，$\hat{\boldsymbol{E}}_{\parallel}(P) \neq \hat{\boldsymbol{E}}_{\parallel}(P')$ となるはずであるが，それは回転対称性と矛盾する．よって電場に，xy-平面に平行な成分はないと結論づけられる．

その他に，平面電荷に対して座標を反転させたとき，やはり何も変わらないことが分かる (図 5)．つまり $z > 0$ での電場と $z < 0$ での電場は全く同じような振る舞いを見せることが予想できる．もし点 P での電場 $\boldsymbol{E}(P)$ が $+z$ 方向であったなら，反転した座標系での電場 $\boldsymbol{E}(P')$ は $-z'$ 方向となっている．すなわち $\boldsymbol{E}(-z) = -\boldsymbol{E}(z)$．これを「反転対称性がある」と言う．

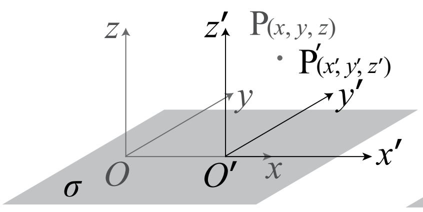

図 3　平行移動について対称

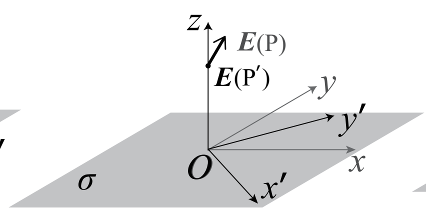

図 4　回転について対称

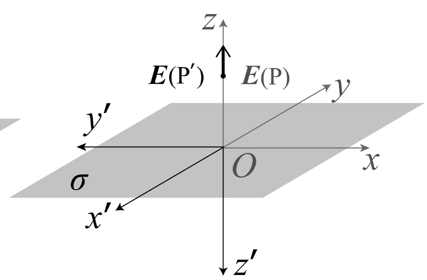

図 5　反転に対して対称

以上，長々と解説したが，慣れてくれば「図 2 のように座標を導入すると，対称性より電場は z にしか依存せず，電場の向きは z 軸に平行で，$z > 0$ と $z < 0$ とでは対称的な振る舞いをする」と簡潔にまとめてしまえば良いだろう．

次に「2. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ が計算しやすいような閉曲面をとる」について．これにも幾分かはコツが必要だが，今の場合は閉曲面として点 P を底面 (面積 S) に含むような円筒を考える (図 6)．というのも，大前提に点 $\mathrm{P}(0, 0, z)$ での電場を求めることがあるので，少なくとも点 P を含むような面でなければならない．また電場が z にしか依存せず，z 方向に平行であることから，点 P を含むような面を xy-平面に平行にとると $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ の計算がラクにできる．そして閉曲面 xy-平面について対称であることを考慮すれば，$(0, 0, -z)$ 面も閉曲面の一つの面として選ぶとよいだろう．あとは特に制限がなく，図 6 のような円筒形ではなく，底面が面積 S で高さ $2z$ の直方体であってもよい．

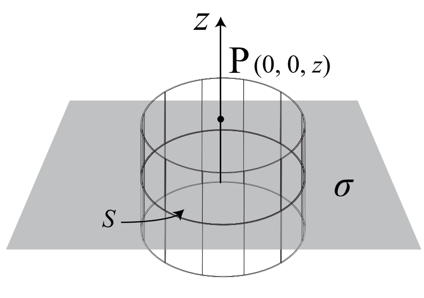

図 6　閉曲面の取り方

そして「3. ガウスの法則において左辺と右辺をそれぞれ計算する」に取りかかろう．まず (1.1) の左辺から，

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S &= \int_{\text{底面}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S + \int_{\text{側面}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S \\ &= \int_{(0,0,\mathrm{z})\ \text{面}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S + \int_{(0,0,\text{-}\mathrm{z})\ \text{面}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{1.2}$$

ただし側面において $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = (0,0,E_z) \cdot (x/r, y/r, 0) = 0$ $(r = \sqrt{x^2+y^2})$ であることを用いた．さらに計算を丁寧に進めると[*6]，

$$
\begin{aligned}
&\int_{(0,0,\mathrm{z})\text{ 面}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S + \int_{(0,0,\text{-}\mathrm{z})\text{ 面}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S \\
&= \int_{(0,0,\mathrm{z})\text{ 面}} (0,0,E_z(z)) \cdot (0,0,1) \mathrm{d}S + \int_{(0,0,\text{-}\mathrm{z})\text{ 面}} (0,0,E_z(-z)) \cdot (0,0,-1) \mathrm{d}S \\
&= \int_{(0,0,\mathrm{z})\text{ 面}} E_z(z) \mathrm{d}S + \int_{(0,0,\text{-}\mathrm{z})\text{ 面}} E_z(z) \mathrm{d}S \\
&= E_z(z) \int_{(0,0,\mathrm{z})\text{ 面}} \mathrm{d}S + E_z(z) \int_{(0,0,\text{-}\mathrm{z})\text{ 面}} \mathrm{d}S \qquad (\because\ E_z(-z) = -E_z(z)) \\
&= E_z(z)S + E_z(z)S \\
&= 2E_z(z)S
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

となる．次に右辺について，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{xy\text{-平面のうち閉曲面でくり抜かれる領域}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma S}{\epsilon_0}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

最後に「電場の大きさを求め，1. での電場の方向と合わせる」を行おう．ガウスの法則から

$$
2E_z(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \tag{1.5}
$$

$$
\therefore\ E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{1.6}
$$

電場の方向は，$z > 0$ では $(0,0,1)$ であり，$z < 0$ では $(0,0,-1)$ であるから，

$$
\boldsymbol{E} = (0,0,E), \tag{1.7}
$$

$$
E = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & (z > 0) \\[2ex] -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & (z < 0) \end{cases} \tag{1.8}
$$

となる[*7]．

実は，電場は z にも依存していないことが分かる．平面電荷を水の沸き出し口，電場を水の流れに喩えると，丁度 $z = 0$ で沸き出した水が一定の割合で $+z$ 方向，$-z$ 方向にそれぞれ流れ出ていっている．そう考えると流れが変わらない (つまり z にも依存しない) のは納得がいくかと思う．

[*6] 単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は閉曲面の外側に向かう方向で，閉局面に垂直であり，長さが 1 であることから決められる．

[*7] あるいは，

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(0, 0, \frac{z}{|z|}\right). \tag{1.9}
$$

2 微分形のガウスの法則を用いて電場を求める

次に，微分形のガウスの法則

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \tag{2.1}$$

を用いて，平面電荷の作る電場を求めてみよう[*8]．この場合，平面電荷を実は厚み d の板に一様な密度 ρ で分布している電荷だと考えることになる (図 7)．この仮設は尤もらしい．なぜなら (厚みのない)2 次元的な平面電荷は実際には存在せず，見るものさしを細かくしていけば，いつかは厚みのある板状の一様電荷分布になるだろうからだ．原点を板の厚みの半分のところにとり図 7 のように座標軸を導入する．ここでも対称性から，

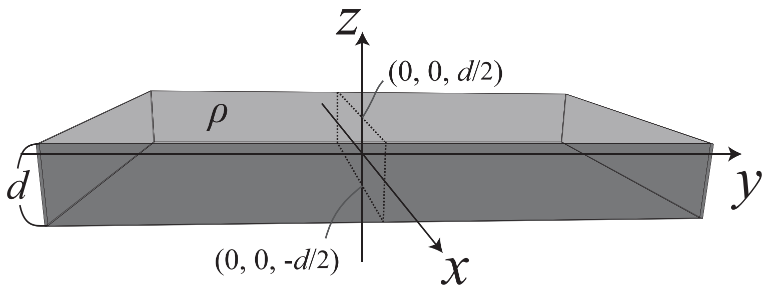

図 7

電場は z にしか依存せず，z 軸に平行な向きであることが分かる．よって (2.1) 式は次のようになる．

$$\frac{\partial E_z(z)}{\partial z}=\begin{cases}\dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (|z|<d/2)\\[2ex] 0 & (|z|>d/2)\end{cases} \tag{2.2}$$

$|z|>d/2$ について，対称性から $E_z(-z)=-E_z(z)$ であることに留意すると，

$$E_z(z)=\begin{cases}-E & (z<-d/2)\\ E & (z>d/2)\end{cases} \tag{2.3}$$

ただし E は定数．また $|z|<d/2$ に対して

$$E_z(z)=\frac{\rho}{\epsilon_0}z+D \tag{2.4}$$

D は定数である[*9]．$z=\pm d/2$ で電場は連続であるという条件から，

$$E_z(d/2)=\frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{d}{2}+D=E \tag{2.5}$$

$$E_z(-d/2)=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{d}{2}+D=-E \tag{2.6}$$

$$\therefore\ E=\frac{\rho d}{2\epsilon_0},\qquad D=0. \tag{2.7}$$

[*8] ひとまず δ-関数を用いないで電場を求め，後でもう一度 δ-関数を用いて解くことにする．
[*9] 対称性の要請である $E_z(-z)=-E_z(z)$ を満たすためには $D=0$ であることは分かる．

すなわち，

$$E_z(z) = \begin{cases} -\dfrac{\rho d}{2\epsilon_0} & (z < -d/2) \\ \dfrac{\rho}{\epsilon_0} z & (-d/2 < z < d/2) \\ \dfrac{\rho d}{2\epsilon_0} & (z > d/2). \end{cases} \tag{2.8}$$

ρd が平面電荷密度 σ と等しいことから，$|z| > d/2$ では積分形のガウスの法則で求めた電場と一致する．ただし，ここで求めた電場は連続的に変化している (図 8) が積分形のガウスの法則で求めた電場は $z = 0$ で不連続的に変化している (図 9) ことに注意する必要がある．実際，微分系のガウスの法則 (2.1) は電場 $\boldsymbol{E}$ が連続であることを要請しているので，このような違いがあることを見逃すわけにはいかない．

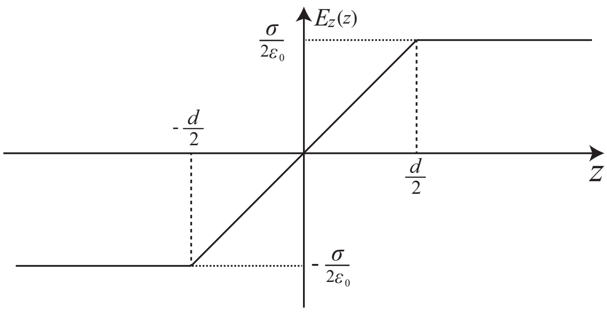

図 8　微分形のガウスの法則で求めた電場

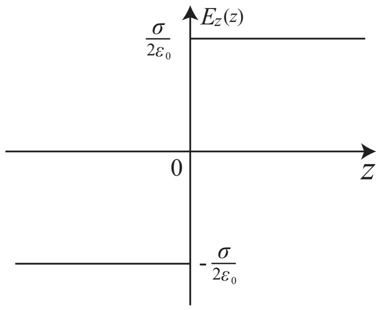

図 9　積分形のガウスの法則で求めた電場

結論から言うと，いま平面電荷を板状の一様電荷に置き換えて電場を求めたが，その置き換えがこのような違いを生じさせている．$\sigma = \rho d$ を一定に保ちながら $d \to 0$ とすると，厚みのない平面電荷が作る電場 (積分形で求めた) に一致することが分かるだろう．確かに d をどんどん小さくしていくと図 8 →図 9 になる．

しかし「微分形のガウスの法則は電場が連続であることを要請」に競合しないのだろうか．その疑問に答えるためには，“$\sigma = \rho d$ を一定に保ちながら $d \to 0$ とする”をもう少し注意深く眺めてみる必要がある[*10]．σ を一定に保ち，かつ $d \to 0$ ということは，すなわち $\rho = \sigma/d \to \infty$ ということである．ただし d が有限の大きさであれば，ρ も非常に大きな値ではあるものの有限であり，電場も必ず連続的に変化している．だが $d = 0$ という極限では $\rho = \infty$ でありながら σ は有限の値，かつ電場は $z = 0$ で不連続であるという非常に特殊な振る舞いを見せる．この $d = 0$ の場合に**のみ**「微分形のガウスの法則は電場が連続であることを要請」せず，やはり厚みのない 2 次元平面に分布する電荷が作る電場は平面の上下で不連続的に変化することになる．

このような極限的な場合は δ-関数[*11]を使って電荷分布を表現する．すなわち，$\sigma\delta(z)$ という電荷分布を考える．ただし $\delta(z)$ は次のような関数である[*12]．

$$\delta(z) = \begin{cases} \infty & (z = 0) \\ 0 & (z \neq 0), \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\int \mathrm{d}z \delta(z) = \begin{cases} 1 & (\text{積分区間に } z = 0 \text{ が含まれる}) \\ 0 & (\text{積分区間に } z = 0 \text{ が含まれない}). \end{cases} \tag{2.10}$$

[*10] 量子力学の井戸型ポテンシャルの問題でも同じような状況を考えた人もいるかもしれない．数学的には同じ部類の話である．
[*11] δ-「関数」という名前ではあるが，普通の関数ではなく超関数 (distribution) と呼ばれるもの．δ-関数についての基本的な説明は小野寺嘉孝著『物理のための応用数学』裳華房 などを参照．
[*12] (2.9) 式はあまり良い表記ではなく，δ-関数の定義は (2.10) 式．

このような電荷分布に対しても，やはり対称性から電場は z にしか依存せず，z 軸に平行な向きであると言える．よって，(2.1) 式は

$$\frac{\partial E_z(z)}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma\delta(z). \tag{2.11}$$

この微分方程式を $-\Lambda < z < \Lambda\,(\Lambda > 0)$ の区間で積分すると，

$$E_z(\Lambda) - E_z(-\Lambda) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{2.12}$$

$E_z(-z) = -E_z(z)$ を用いれば

$$E_z(\Lambda) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{2.13}$$

これは $\Lambda\,(> 0)$ によらないので，結局，積分形のガウスの法則で求めた電場と完全に一致する．

最後に，留意事項として δ-関数を含む微分方程式は連続の条件が課せられないことをもう一度記しておく．そのかわりに，δ-関数を含む微分方程式に課せられる条件がある．それは，δ-関数の発散点を含む微小領域 (今の場合 $z = 0$ を含む領域 $[-\Lambda, \Lambda]$) で積分して，領域のサイズをゼロに持っていった ($\Lambda \to 0$ とした) 式である．つまり (2.12) 式は正確には

$$E_z(+0) - E_z(-0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{2.14}$$

という境界条件を表す式で，これは確かに電場が $z = 0$ で不連続になっていることを示している．これと $z = 0$ を含まない領域で積分した場合に得られる式（と対称性を考慮して）

$$E_z(z) = \begin{cases} E & (z > 0) \\ -E & (z < 0) \end{cases} \tag{2.15}$$

から $E = \sigma/2\epsilon_0$ を得るのである．