

# ホール効果について

大阪大院 基礎工 藤本純治\*<sup>1</sup>

3年の学生実験のときに実験するだろうが、電磁気学の勉強として学んでおくこともよいだろう。現在も研究されている（整数/分数）量子ホール効果や異常ホール効果、スピンホール効果などの基礎としても、しっかりと理解しておいて損はない。ちなみにホール効果の「ホール」は人名で、Hall という人が発見したことに因む。

## 1 ホール効果が起こる状況

まず何より 状況設定を理解しよう。板状の導体を  $xy$  平面に設置する。そこに電流を  $+y$  方向に流して、磁場を  $+z$  方向に印加した。状況設定はこれだけだ（右図参照）。こんな状況下で何が起こるのか、それをこれから考えていこう。

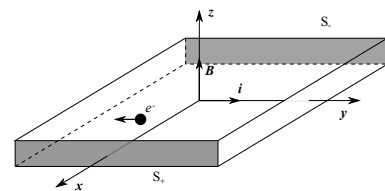


図1 状況設定. ここでは導体の厚さを考慮に入れていないが、厚みを取り入れたところで本質的な変化はない。

## 2 ホール効果とは

電流は電子の流れで 磁場中にある荷電粒子にはローレンツ力が働くと覚えていけば「おや?」と思うに違いない。ローレンツ力とは（絶対に覚えておくべきことだが、敢えて記すと）

$$f = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

ここで  $f$  がローレンツ力、荷電粒子の電荷が  $q$  で  $v$  がその速度、 $E, B$  はそれぞれ電場と磁場である。今の状況では電場は印加しておらず、また電流（電子の流れと逆方向！）と磁場との向きが垂直であることから、 $v \times B$  がゼロでない。つまりローレンツ力  $f$  が電子に働くことになる\*<sup>2</sup>。そうすると電子はその力を受けて曲がるだろうな、と推測できる。ここで一つ注意しなければいけないことがある。(2.1) 式から、 $v \times B$  に  $q$ （電子だから  $-e$ ）をかけたものが  $f$  なのだ。つまり電子の場合、ローレンツ力は  $v \times B$  とは逆方向になる。 $v \times B$  が  $-x$  方向なので、 $f$  は  $+x$  方向で、電子はその方向へと曲がっていく。問題 [27] で見たように、電子が円運動する\*<sup>3</sup>ためにはかなりの磁場を印加しないとイケない。今はそれほど強い磁場ではないとして考えると、電子は導体の端  $S_+$  まで行くとローレンツ力を受けていてもそれより  $+x$  方向へ行けないので、大人しくだいたい  $v$  の方向に進む\*<sup>4</sup>ことになるだろう。電流はたくさんの電子が同じ方向へ動いている、その流れなのだから、上と同じような機構でたくさんの電子は端  $S_+$  に集まっていくことになる。問題 [27] にあるように電子の速度がだいたい  $10^6$  m/s\*<sup>5</sup>だから、電流を流して磁場を印加するとすぐに\*<sup>6</sup>電子が端  $S_+$  に集まるだろう。そうすると今度は、相対的にマイナスの電荷が端  $S_+$  に溜まるとなると、電場が  $+x$  方向に生まれるだろう

\*<sup>1</sup> jfujimoto@blade.mp.es.osaka-u.ac.jp

\*<sup>2</sup> ここでは電子を古典的な粒子だと思っている。量子力学的には電子も場の一種だ。

\*<sup>3</sup> その場合はまた別の状況になって、電子はランダウ準位を作ったりする。

\*<sup>4</sup> 詳しく見てみると、カイラル状態が出来ていて、これもまた面白い現象だったりする。

\*<sup>5</sup> これはだいたいフェルミ速度と呼ばれるもののオーダー。

\*<sup>6</sup> 印加磁場の大きさを 1T、導体の幅を 1cm としても、だいたい  $10^{-4}$ s くらいの時間を要するのみ。

と推測できる．あくまでローレンツ力によって多数の電子が端  $S_+$  に寄せられていくことが先で，それによって電場ができるのであって，電場は状況設定には含めない\*7．この順序が曖昧になると頭が混乱してしまうので注意しておこう．

さて，電子はこの電場の影響をも受ける．つまり電子は (2.1) 式の右辺第 1 項を見れば分かるように  $-x$  方向の力を感じる．磁場  $B$  の影響でどんどんと電子が端  $S_+$  に溜まればそれだけ強い電場が生じることになるだろうが，それに伴って  $-x$  方向の力も強くなる．結果，釣り合いが生じて端  $S_+$  に溜まる電子の数は増えなくなり，一定値（ゼロではない）に落ち着く．これがホール効果である．

### 3 ホール効果で分かること

そのとき，電子を感じる力はゼロになっているはずだから，(2.1) 式がゼロ．

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (3.2)$$

$$\therefore \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} (\equiv \mathbf{E}_H) \quad (3.3)$$

内部で  $E_H$  という電場ができているということが分かる．これを電流密度  $i$  を用いて表してみよう． $n$  を電子数密度として  $i = -nev$  だから

$$\mathbf{E}_H = \frac{-nev \times \mathbf{B}}{ne} = \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{B}}{ne} \quad (3.4)$$

大きさとしては，

$$E_H = \frac{iB}{ne} \quad (3.5)$$

となる．注目してほしいことは，この式において  $i, B$  は自分たちが調節できる量であり， $E_H$  は  $S_{\pm}$  間の電圧を測定することで求めることができ， $e$  は電荷素量だ．ということは，この実験から 電子数密度が幾らなのか知ることができる のである！

ここでは電流は電子の流れだと思い込んでいたが，仮に電流がプラスの電荷を持つ粒子の流れだったとすると，どうだろうか．(電流の向きは今までの状況と同じとして つまり電流と同じ向きにその荷電粒子が動いているとして) ローレンツ力が働くのは同じだが，電子と違い  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  と同じ方向の力を受ける．ということは，電子と逆向きに進んでいることと合わせて考えると，結局，電子と同じく端  $S_+$  にその荷電粒子が溜まっていくことになる．違うのはその荷電粒子が端  $S_+$  に溜まっていくと，相対的にプラスの電荷が端  $S_+$  にあるということになることだ．つまり電場  $E_H$  は  $-x$  方向に生じる．なるほど，ホール効果で電流を担っている荷電粒子がプラス電荷なのかマイナス電荷なのかが判断できる のである！ちなみに (3.4) 式において，荷電粒子の電荷を  $q$  とすれば  $i = nqv$  から

$$\mathbf{E}'_H = -\frac{nqv \times \mathbf{B}}{nq} = -\frac{\mathbf{i} \times \mathbf{B}}{nq} \quad (3.6)$$

となって，確かに電子の場合の  $E_H$  とは逆向きであることが分かる．

実際に P 型半導体では，電流を担う荷電粒子（キャリアと呼ぶ）がプラス電荷の正孔（hole）であることが知られている．以上がホール効果の基本的な物理だ．

\*7 正確には，導体に電流を流すということは，導体の両端に電圧をかけて（ $+y$  方向に）電場を生じさせているので，そういう意味では状況設定に電場が含まれる．この解説ではその電場の効果は電流として取り入れているので，状況設定には含めないということだ．