

# 誘電体における鏡像法について

大阪大院 基礎工 藤本純治\*<sup>1</sup>

電磁気学で鏡像法を学ぶが、概して導体についての解説のみに止まる。誘電体についても同じように適応できる例が(少ないが)あるのでここにまとめておく。長岡洋介 著『電磁気学 2』物理入門コース(岩波書店)でなされている解説では納得できない人は、以下の第 1 節を読むと納得できるかもしれない。ちなみに小野嘉之著『ガウスの法則の使い方』物理学演習 One Point(共立出版)を参考にした。

## 1 半無限空間を誘電体が占める場合

(問題) 図 1 のように  $x < 0$  の半無限空間を誘電率  $\epsilon_1$  の均質な誘電体が占めており、誘電体表面から  $a$  の距離にある点電荷  $q$  が置かれているとき、任意の位置における電場を求めよ。

(考え方) まず導体の場合を考えると、点電荷が作る電場を完全に打ち消すように電荷が導体表面に配置される。そのため導体内部には電場が存在しなかった。それに対して誘電体の場合は、電荷の移動が制限されるために点電荷の作る電場を部分的に打ち消しはするものの、残った電場は誘電体内部に入り込むだろうと予想できる。すなわち、真空における電場を求めるとき、導体の場合に点電荷と大きさは同じで符号の異なる鏡像電荷を考えたとこを、大きさが同じでない鏡像電荷を考えればよいだろう。また誘電体内部では、点電荷の電場が部分的に打ち消されるために、 $q$  よりも小さい電荷があるように見えているはずだ\*<sup>2</sup>。ちなみに導体の場合は、内部には電場が侵入しないので、考えるまでもなく電場はゼロである。まとめると以下の流れで電場を求めることができるだろう。

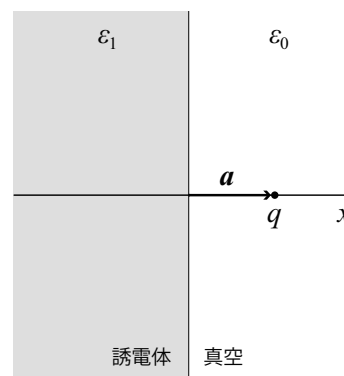


図 1

- 真空における電場は、点電荷  $q$  と、誘電体表面を挟んで点電荷と対称な位置に鏡像電荷  $-q'$  とがあるとする。(図 2)
- 誘電体内部の電場は、もとの点電荷の位置に  $q$  と異なる強さの点電荷  $q''$  のみがあるとする。(図 3)
- $q', q''$  を電場および電束密度の接続条件を満たすように決める。

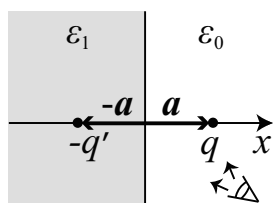


図 2

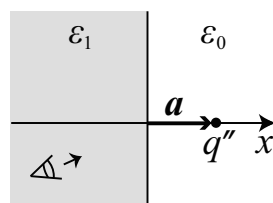


図 3

図 2, 3 はそれぞれ真空中と誘電体中にある試験電荷が感じる電荷を表している。図 2 の右下, 図 3 の左下にある“怪しい”絵は試験電荷から見たらという意味合い。

\*<sup>1</sup> jfujimoto@blade.mp.es.osaka-u.ac.jp

\*<sup>2</sup> 小野嘉之先生は「水の中から見た外の世界が、外の世界の人が見るものと少し違って見えるようなもの」と表現されている。

注意しなければならない点は、この説明はあくまでも“予想”であるから、最後の接続条件を満たすような  $q', q''$  が存在しなければ、その予想は間違いだということ\*3。そして実際に計算してみてそのような  $q', q''$  が存在することを示すことができる。

(解答) 真空における電場  $E_v(\mathbf{r})$  は、位置  $a$  にある点電荷  $q$  と位置  $-a$  にある鏡像電荷  $-q'$  が作る電場に等しいから、 $\hat{e}_x$  を  $x$  軸方向の単位ベクトルとして

$$E_v(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{(\mathbf{r} - a\hat{e}_x)^2} \frac{\mathbf{r} - a\hat{e}_x}{|\mathbf{r} - a\hat{e}_x|} - \frac{q'}{(\mathbf{r} + a\hat{e}_x)^2} \frac{\mathbf{r} + a\hat{e}_x}{|\mathbf{r} + a\hat{e}_x|} \right\}. \quad (1.1)$$

誘電体内部における電場  $E_d(\mathbf{r})$  は、位置  $a$  にある仮想的な点電荷  $q''$  が作る電場に等しいから

$$E_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{q''}{(\mathbf{r} - a\hat{e}_x)^2} \frac{\mathbf{r} - a\hat{e}_x}{|\mathbf{r} - a\hat{e}_x|}. \quad (1.2)$$

誘電体中の電場なので、誘電率が  $\epsilon_1$  であることに注意。

電場  $E$  の接続条件

$$(E_v|_{x=0} \text{の界面に対する接線成分}) = (E_d|_{x=0} \text{の界面に対する接線成分}) \quad (1.3)$$

を求める。

$$E_v|_{x=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -a(q + q') \\ (q - q')y \\ (q - q')z \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$E_d|_{x=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -aq'' \\ q''y \\ q''z \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

なので (1.3) 式は

$$\frac{q - q'}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

また電束密度  $D$  の接続条件

$$(D_v|_{x=0} \text{の界面に対する法線成分}) = (D_d|_{x=0} \text{の界面に対する法線成分}) \quad (1.7)$$

を求める。 $D_v = \epsilon_0 E_v$ ,  $D_d = \epsilon_1 E_d$  なので (1.7) 式は

$$q + q' = q''. \quad (1.8)$$

$$\therefore \begin{cases} q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_0} q \\ q'' = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_0} q. \end{cases} \quad (1.9)$$

これらを (1.1) 式と (1.2) 式に代入すれば任意の位置での電場が求まる。また、 $q', q''$  の位置がずれていた場合は任意の  $(y, z)$  において接続条件を満たし得ないことは明らか。

参考までに、 $\epsilon_1/\epsilon_0 = 1, \epsilon_1/\epsilon_0 = 1.5, \epsilon_1/\epsilon_0 = 10$  の3つの条件でどのような電場  $E(x, y)$  となるかを図示しておく。電場は  $E_0 = 5q/4\pi\epsilon_0$  で規格化し、座標は  $a$  を基準にした。ただし見やすくするために点電荷  $q$  の近傍  $|r/a - \hat{e}_x| > 10^{-1}$  の電場は非表示にした。

\*3 「試しにそうだと仮定して計算してみて、最後の結果で矛盾が生じなければ、その仮定は妥当」というようなことも『ガウスの法則の使い方』には記されている。現象論的な物理学においてとても大切なスタンスである。

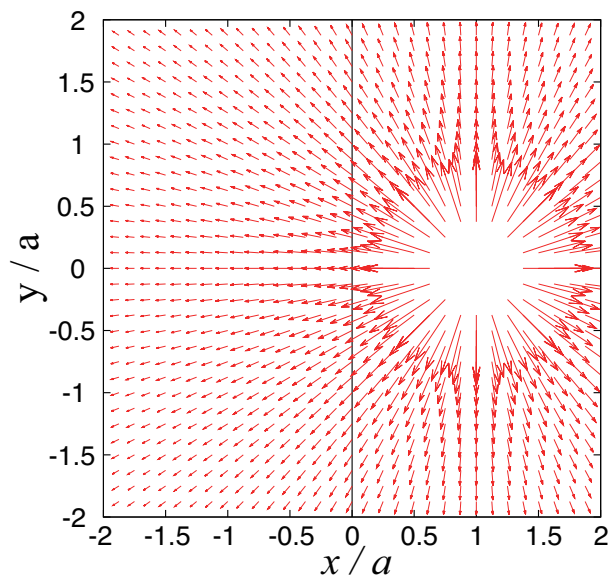


図4  $\epsilon_1/\epsilon_0 = 1$  の場合，つまり真空中に点電荷  $q$  がある状況と同じ．

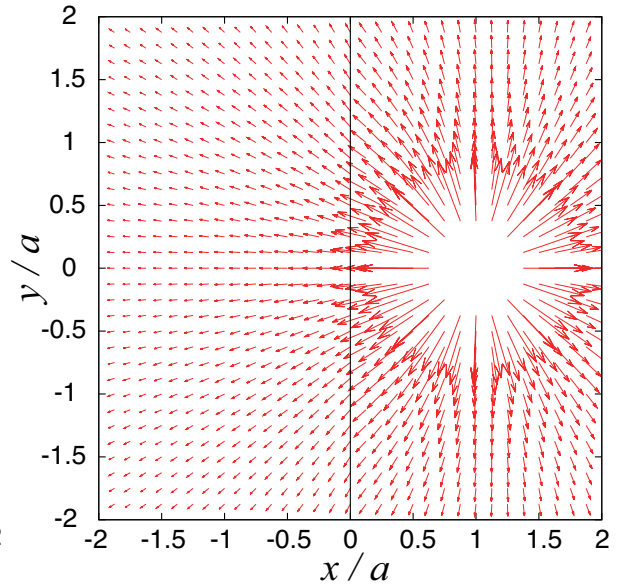


図5  $\epsilon_1/\epsilon_0 = 1.5$  の場合．境界の右から左に移るときに電場が弱まっていることが分かる．

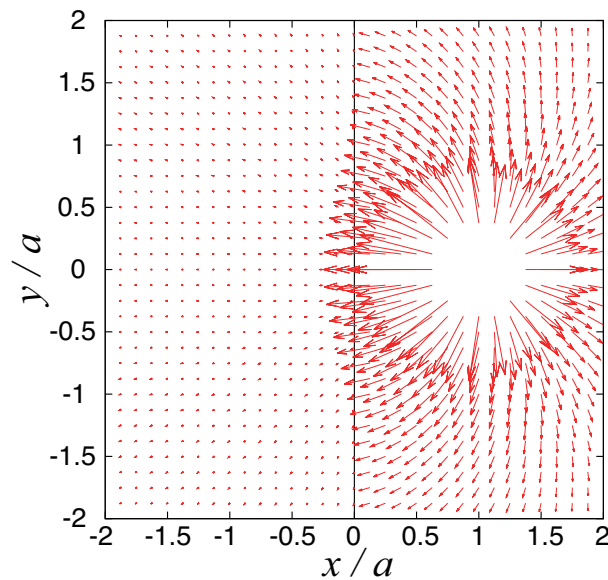


図6  $\epsilon_1/\epsilon_0 = 10$  の場合．界面まで電場があまり小さくならず，また誘電体内部にはほぼ電場が入っていないことが分かる．つまり  $x < 0$  に導体がある場合に近づいている．実際， $\epsilon_1/\epsilon_0 \rightarrow \infty$  とすると導体の場合と一致する．